অধ্যায়- বহুপদী এবং বহুপদীসমূহের সমীকরণ

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

**** ১। $4x^2 + 2x - 1 = 0$ এর নিশ্চায়ক নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ০৬, ১৩, ১৪, ২২, ২৩

সমাধান ঃ $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের

$a = 4$
$b = 2$
$c = -1$

নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)$

$= 4 + 16$

$= 20$ [যা যোগবোধক কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়]

$\therefore$ সমীকরণটির মূল দুইটি বাস্তব, অসমান ও অমূলদ। **(Ans.)**

*** ২। কি শর্ত সাপেক্ষে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টো ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে?** বাকাশিবো- ২০০৮, ১৩

সমাধান ঃ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও $\frac{-1}{\alpha}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha \cdot \frac{-1}{\alpha} = \frac{c}{a}$

বা, $-a = c$

$\therefore c + a = 0$

[ইহা নির্ণেয় শর্ত] **(Ans.)**

**** ৩। 3 এবং – 4 মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি লেখ।**

বাকাশিবো- ২০১১, ১৬, ২২

সমাধান ঃ আমরা জানি, দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের সূত্র,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - (3-4)x + 3 \cdot (-4) = 0$

$\therefore x^2 + x - 12 = 0$ **(Ans.)**

**** ৪। $px^2 + x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে p এর মান কত?**

বাকাশিবো- ২০১৩, ১৪, ১৭

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $px^2 + x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $b^2 - 4ac = 0$

বা, $(1)^2 - 4 \cdot p \cdot 2 = 0$

বা, $1 - 8p = 0$

বা, $8p = 1$

$\therefore p = \frac{1}{8}$ **(Ans.)**

$b = 1$
$a = p$
$c = 2$

**** ৫। $x^2 + px + 8 = 0$ এর একটি মূল 4 হলে অপর মূলটি নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০১১'পরি, ১৪

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + px + 8 = 0$ ইহার একটি মূল 4. ধরি অপর মূলটি α

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $4 + \alpha = -p$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $4 \times \alpha = 8$

বা, $\alpha = \frac{8}{4}$

$\therefore \alpha = 2$ **(Ans.)**

*** ৬। k এর মান কত হলে $x^2 - kx + 4$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে?** বাকাশিবো- ২০০৭, ১৫

সমাধান ঃ মূলদ্বয় সমান হলে নিশ্চায়ক $D = 0$ হবে।

অর্থাৎ, $b^2 - 4ac = 0$

বা, $(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

বা, $k^2 - 16 = 0$

বা, $k = \sqrt{16}$

$\therefore k = \pm 4$ **(Ans.)**

$a = 1$
$b = -k$
$c = 4$

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। যদি $x^2-5x+c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হয় তাহলে c এর মান এবং অপর মূলটি নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০০৫'পরি, ১০'পরি, ২২

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - 5x + c = 0$ একটি মূল 4 হলে, অপরটি α হয়।

তাহলে,

মূলদ্বয়ের যোগফল, $4 + \alpha = 5$

বা, $\alpha = 5 - 4$

বা, $\alpha = 1$

$\therefore$ অপর মূলটি 1 **(Ans.)**

আবার,

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

বা, $4 \times 1 = \frac{c}{a}$

$\therefore c = 4$ **(Ans.)**

*** ২। k এর মান কত হলে $(k-1)x^2 - (k+2)x+4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে?** বাকাশিবো- ২০০৯, ১৪

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $(k-1)x^2 - (k+2)x+4 = 0$

মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে, নিশ্চায়ক এর মান শূন্য হবে।

শর্তমতে, $D = 0$

বা, $\{-(k+2)\}^2 - 4.(k-1).4 = 0$

বা, $k^2 + 4k + 4 - 16k + 16 = 0$

বা, $k^2 - 12k + 20 = 0$

বা, $k^2 - 10k - 2k + 20 = 0$

বা, $k(k-10) - 2(k-10) = 0$

এখানে,

$a = k - 1$

$b = -(k+2)$

এবং $c = 4$

বা, $(k-10)\,(k-2) = 0$

হয়, $k-10 = 0$ অথবা, $k-2 = 0$

বা, $k = 10$ বা, $k = 2$

$\therefore$ k = 2 অথবা 10 **(Ans.)**

**** ৩। $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিনগুণ হলে, k এর মান নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ১৯৯২, ২০১৮, ২২

সমাধান ঃ ধরি, একটি মূল α এবং অপর মূল 3α

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + 3\alpha = \frac{-(-k)}{3}$

বা, $4\alpha = \frac{k}{3}$

বা, $\alpha = \frac{k}{12}$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha . 3\alpha = \frac{4}{3}$

বা, $3\alpha^2 = \frac{4}{3}$

বা, $3(\frac{k}{12})^2 = \frac{4}{3}$ $\left[\alpha = \frac{k}{12}\right]$

বা, $(\frac{k}{12})^2 = \frac{4}{3\times3}$

বা, $(\frac{k}{12})^2 = \frac{4}{9}$

বা, $\frac{k}{12} = \pm\ \frac{2}{3}$

বা, $k = \pm\ \frac{2\times12}{3}$

$\therefore$ k = $\pm$ 8 **(Ans.)**

**** ৪। k এর মান কত হলে, x^2-6x-1+k(2x+1) = 0 সমীকরণটির মূল দুইটি বাস্তব ও সমান হবে?** **DUET: 2004-05, বাকাশিবো- ২০১১'পরি, ১৫**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি, $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$

বা, $x^2 - 6x - 1 + 2kx + k = 0$

[যেকোন সমীকরণ থেকে $ax^2 + bx + c$=0 করতে হবে]

বা, $x^2 + (2k - 6)x + k - 1 = 0$

মূল দুইটি সমান হলে নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

SCAN

অর্থাৎ, $b^2 - 4ac = 0$

বা, $(2k - 6)^2 - 4(k - 1) = 0$

বা, $4k^2 - 2 \cdot 2k \cdot 6 + 6^2 - 4k + 4 = 0$

বা, $4k^2 - 24k + 36 - 4k + 4 = 0$

বা, $4k^2 - 28k + 40 = 0$

বা, $4(k^2 - 7k + 10) = 0$

বা, $k^2 - 7k + 10 = 0$

বা, $k^2 - 5k - 2k + 10 = 0$

বা, $k(k - 5) - 2(k - 5) = 0$

বা, $(k - 5)(k - 2) = 0$

হয়, $k - 5 = 0$ অথবা, $k - 2 = 0$

বা, $k = 5$ বা $k = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় k এর মান 5 অথবা 2 **(Ans.)**

**** ৫। যদি $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টোর বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a^3+c^3+abc = 0$** বাকাশিবো- ২০১৪, ১৬, ১৯

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$ এবং ইহার মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha^2}$ হলে

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{b}{a}$ ---------- (i)

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \frac{c}{a}$

বা, $\alpha = \frac{a}{c}$ ---------- (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $\alpha + \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{b}{a}$

বা, $\frac{a}{c} + \frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2} = -\frac{b}{a}$

[(ii) নং হতে α এর মান বসিয়ে]

বা, $\frac{a}{c} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b}{a} = 0$

বা, $\frac{a^3+c^3+abc}{a^2c} = 0$

$\therefore a^3 + c^3 + abc = 0$ **(Proved)**

*** ৬। $x^2+bx+c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি, অন্তরফলের তিনগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $2b^2 = 9c$** বাকাশিবো- ২০১৩, ২২

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2+bx+c=0$ ইহার মূলদ্বয় α ও β হইলে,

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -b$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = c$

প্রশ্নমতে, $\alpha + \beta = 3(\alpha - \beta)$

বা, $(\alpha + \beta)^2 = \{3(\alpha - \beta)\}^2$ [বর্গ করে]

বা, $(-b)^2 = 9\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}$

$[(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta) - 4\alpha\beta]$

বা, $b^2 = 9(b^2 - 4c)$

বা, $9b^2 - b^2 = 36c$

বা, $8b^2 = 36c$

বা, $4(2b^2 - 9c) = 0$

বা, $2b^2 - 9c = 0$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore 2b^2 = 9c$ **(Proved)**

***** ৭। $bx^2 + cx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে,**

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{b}} = 0$$

বাকাশিবো- ১৯৮২, ৮৪, ৮৭, ৯০, ৯৫, ০৯'পরি,২৩

সমাধান ঃ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-c}{b}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{b}$

SCAN

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$= \frac{(\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{c}{b}} \quad \text{[ল.সা.গু করে]}$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$= \frac{\frac{-c}{b}}{\sqrt{\frac{c}{b}}} + \sqrt{\frac{c}{b}} \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$= -\frac{\sqrt{c}.\sqrt{c}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$= -\sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$= 0$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S **(Showed)**

SOS রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

*** ১। $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)$ এবং $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

বাকাশিবো- ২০০০, ০৮'পরি, ১০'পরি,২৩

সমাধান ঃ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha}$

$$= \alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-b}{a} + \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{-b}{a} + \left(\frac{-b}{a} \times \frac{a}{c}\right) = \frac{-b}{a} - \frac{b}{c}$$

$$= \frac{-bc-ab}{ac} = \frac{-b(c+a)}{ac}$$

এবং নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{c}{a} + 2 + \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{c}{a} + 2 + \frac{a}{c}$$

$$= \frac{c^2+2ac+a^2}{ac} = \frac{(c+a)^2}{ac}$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ ঃ

$$x^2 - (\text{মূলদ্বয়ের যোগফল})x + \text{মূলদ্বয়ের গুণফল} = 0$$

$$\text{বা}, x^2 + \frac{b(c+a)x}{ac} + \frac{(c+a)^2}{ac} = 0$$

$$\text{বা}, \frac{acx^2+b(c+a)x+(c+a)^2}{ac} = 0$$

$$\therefore acx^2 + b(c+a)x + (c+a)^2 = 0 \textbf{ (Ans.)}$$

***** ২। $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha - \beta)^2$ এবং $(\alpha + \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০০৬'পরি, ০৭, ০৯, ১৩

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ এবং মূলদ্বয় α ও β

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -p$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta = q$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $= (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha + \beta)^2$$

$$[(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab]$$

$$= 2(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 2(-p)^2 - 4.q \qquad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$= 2p^2 - 4q$$

এবং নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল $= (\alpha - \beta)^2.(\alpha + \beta)^2$

$$= \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}(\alpha + \beta)^2$$

$$[(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab]$$

$$= \{(-p)^2 - 4.q\}(-p)^2$$

[মান বসিয়ে]

$$= (p^2 - 4q)p^2$$

$$= p^4 - 4p^2q$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ ঃ

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$\therefore x^2 - (2p^2 - 4q)x + p^4 - 4p^2q = 0$ **(Ans.)**

***** ৩। $27x^2+6x-(p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে p এর মান নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০১৪, ১৮, ১৯, ২২

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $27x^2 + 6x - (p + 2) = 0$ হলে, একটি মূল α, অপরটি α^2 হবে।

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \alpha^2 = \frac{-6}{27} = -\frac{2}{9}$ ---------- (i)

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha \cdot \alpha^2 = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\alpha^3 = -\frac{p+2}{27}$ ---------- (ii)

(i) নং সমীকরণকে ঘন করে পাই,

SCAN

$$(\alpha+\alpha^2)^3=\left(\frac{-2}{9}\right)^3$$

বা, $\alpha^3+\alpha^6+3\cdot\alpha\cdot\alpha^2(\alpha+\alpha^2)=\frac{-8}{729}$ $[9^3=729]$

বা, $\frac{-(p+2)}{27}+\{\frac{-(p+2)}{27}\}^2+3\cdot\frac{-(p+2)}{27}\cdot\frac{-2}{9}=\frac{-8}{(27)^2}$

$[(27)^2=729]$

বা, $\frac{-(p+2)}{27}+\frac{p^2+4p+4}{(27)^2}+\frac{2(p+2)}{81}+\frac{8}{(27)^2}=0$

বা, $\frac{-27p-54+p^2+4p+4+18p+36+8}{(27)^2}=0$

বা, $p^2-27p+22p-54+48=0$

বা, $p^2-5p-6=0$

বা, $p^2-6p+p-6=0$

বা, $p(p-6)+1(p-6)=0$

বা, $(p-6)(p+1)=0$

হয়, $p-6=0$ | অথবা, $p+1=0$

বা, $p=6$ | বা, $p=-1$

$\therefore$ p এর মান 6 অথবা -1 **(Ans.)**

***** ৪। যদি $px^2+qx+1 = 0$ এবং $qx^2+px+1 = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে তবে দেখাও যে $p+q+1 = 0$.**

DUET: 2011-12, বাকাশিবো- ১৯৯২, ২০১৪

সমাধান ঃ মনে করি, সাধারণ মূল $= \alpha$

$$\therefore p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0 _____ (i)$$

$$q\alpha^2 + p\alpha + 1 _____ (ii)$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণে বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

SCAN

$$\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{-\alpha}{p-q} = \frac{1}{p^2-q^2}$$

বা, $\frac{\alpha^2}{-(p-q)} = \frac{-\alpha}{p-q} = \frac{1}{(p+q)(p-q)}$

$[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

বা, $-\alpha^2 = -\alpha = \frac{1}{p+q}$

শর্ত বা প্রমাণের ক্ষেত্রে,

বজ্রগুণনের দুই পাশের দুইটির গুণফল = মাঝখানটির বর্গ

$$\therefore -\alpha^2 \times \frac{1}{p+q} = (-\alpha)^2$$

বা, $\frac{-\alpha^2}{p+q} = \alpha^2$

বা, $p + q = -1$

$\therefore p + q + 1 = 0$ **(Showed)**

***** ৫। যদি $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হয়, তবে প্রমাণ কর যে, এর অপর মূলটি $4\alpha^3 - 3\alpha$ হবে।**

বাকাশিবো- ১৯৮৭, ৮৮, ৮৯, ২০০৩'পরি, ১৪, ২২

সমাধান ঃ মনে করি, অপর মূলটি $= \beta$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{4\alpha}$$

আমরা জানি, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \alpha^2$$

$$\Rightarrow \beta.\beta = \frac{1+2-4\alpha^2}{4}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3-4\alpha^2}{4} \times \frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3-4\alpha^2}{4} \times \frac{1}{-\frac{1}{4\alpha}}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3-4\alpha^2}{4} \times 1 \times (-4\alpha)$$

$$\Rightarrow \beta = -3\alpha + 4\alpha^3$$

$\therefore \beta = 4\alpha^3 - 3\alpha$ **(Proved)**